

# Fundamentals of fluid flow

**Mohsen Soltanpour**

Email: [soltanpour@kntu.ac.ir](mailto:soltanpour@kntu.ac.ir)

URL: <http://sahand.kntu.ac.ir/~soltanpour/>

استاتیک سیالات که در بخشهای قبل بحث شد تقریباً علم دقیقی است و تنها کمیتی که نیاز به آزمایش دارد **وزن مخصوص** است. از طرف دیگر طبیعت جریان یک سیال حقیقی بسیار پیچیده است و به آسانی نمی‌توان قوانین اساسی توصیف کننده حرکت کامل یک سیال را به روابط ریاضی تبدیل کرده و مورد استفاده قرار داد. در این بخش استفاده از آزمایشات تجربی ضروری است.

## میدان سرعت: (Velocity field)

در دینامیک ذره (particles) یا جسم صلب (solid) می‌توان حرکت ذره یا جسم را مستقلاً بررسی کرد. سرعت هر ذره را می‌توان با سه معادله زیر بیان نمود:

$$\begin{cases} (v_x)_n = f_n(t) \\ (v_y)_n = g_n(t) \\ (v_z)_n = h_n(t) \end{cases} \quad \text{مولفه سرعت ذره } n \text{ ام:} *$$

از آنجایی که در سیال، تعداد نامحدودی ذره وجود دارد، امکان بررسی حرکت آنها بطریق عملی نیست. برای مشخص کردن جریان می‌توان از مختصات فضایی استفاده کرد (روش میدان - field approach):\*\*

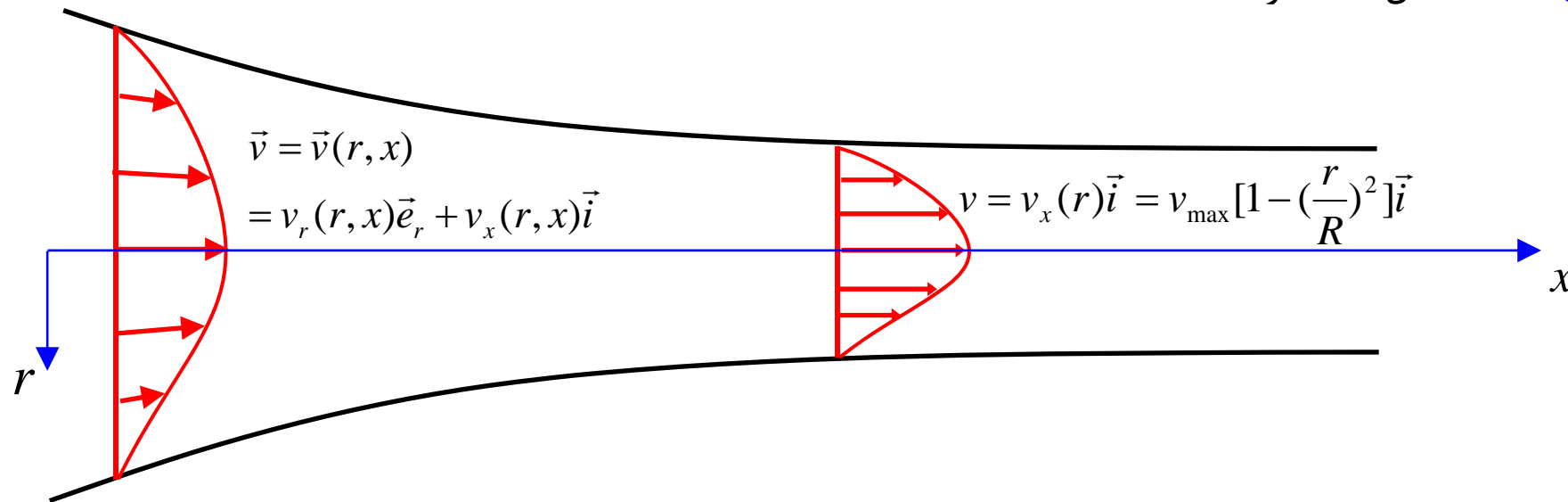
$$\begin{cases} v_x = f(x, y, z, t) \\ v_y = g(x, y, z, t) \\ v_z = h(x, y, z, t) \end{cases}$$

این میدان سرعت که تابعی از سه مختصات فضایی  $(X, Y, Z)$  و زمان  $(t)$  است **جریان سه بعدی** نامیده می شود.\*.

اگر خواص سیال و مشخصه های جریان در هر نقطه از فضا در طی زمان تغییر نکند جریان را **جریان دائمی** یا **پایا (steady flow)** می نامیم.\*\* از طرف دیگر جریان وابسته به زمان **جریان غیر دائمی** یا **ناپایا (unsteady flow)** نامیده می شود. در جریان سه بعدی دائمی:

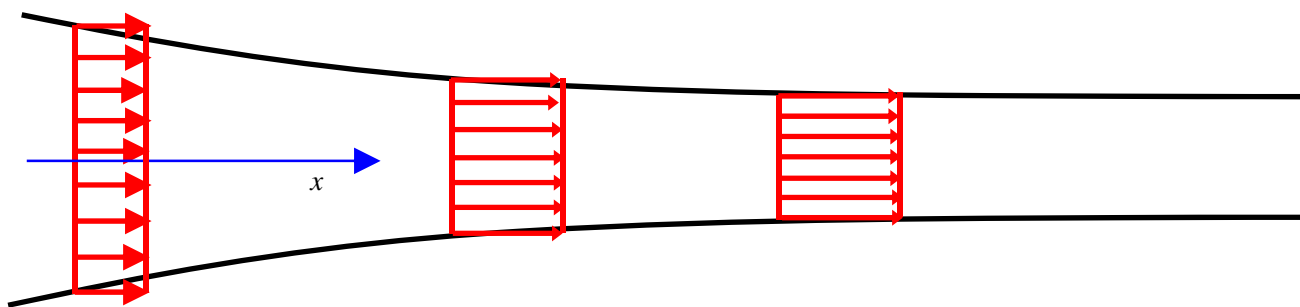
$$\begin{cases} v_x = f(x, y, z) \\ v_y = g(x, y, z) \\ v_z = h(x, y, z) \end{cases}$$

اگر چه اغلب میدانهای جریان سه بعدی اند اما تحلیلها بر مبنای ابعاد کمتر انجام می شوند. مثلا با استفاده از مختصات استوانه ای  $(x, r, \theta)$ ، در جریان دائمی در لوله همگرا مستقیم **جریان دو بعدی** (شکل سمت چپ) و در لوله با قطر ثابت **یک بعدی** است (شکل سمت راست):

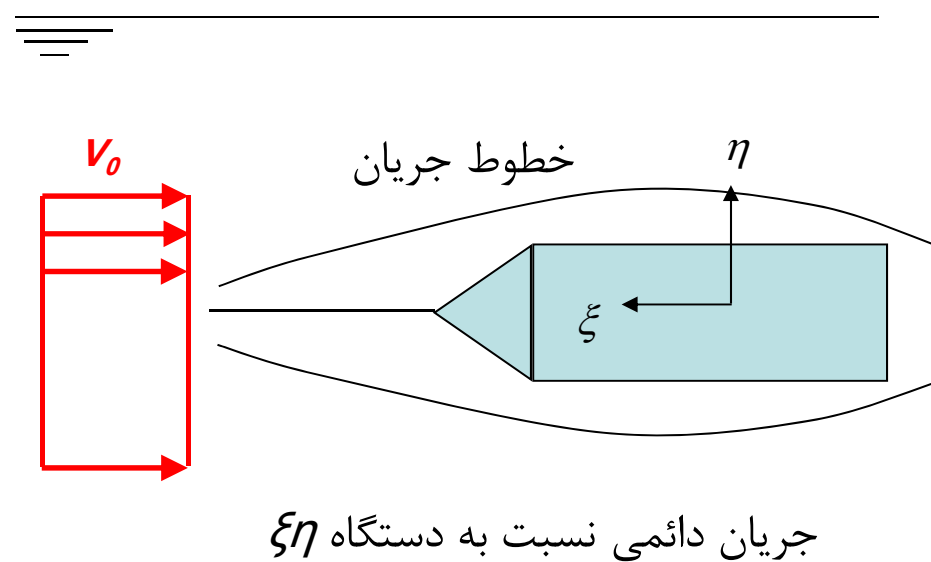
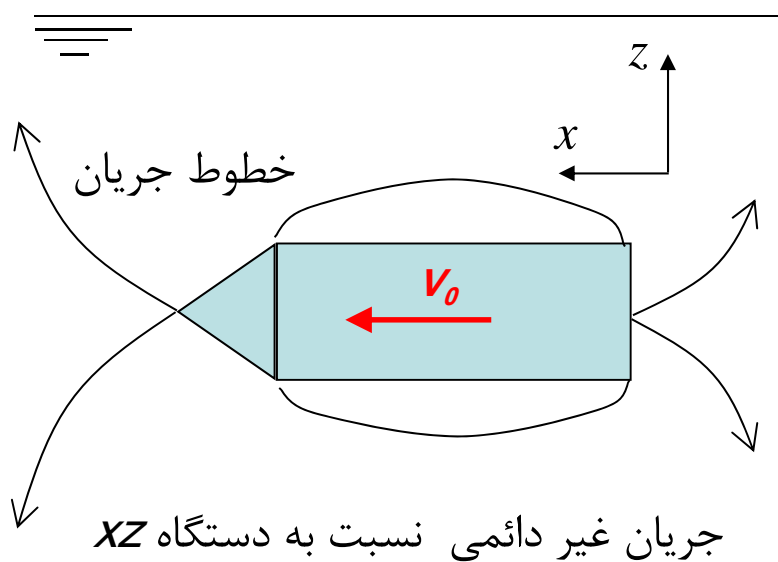


اگر مقدار و جهت سرعت جریان در تمام نقاط سیال یکسان باشد **جریان یکنواخت (uniform)** نامیده می شود\*\*\*.

برای جریان یکنواخت در یک مقطع عرضی سرعت در تمام مقاطع عمود بر جریان دارای مقدار یکسانست.\* با این فرض جریان دو بعدی شکل اسلاید قبل را می توان با شکل زیر نشان داد:

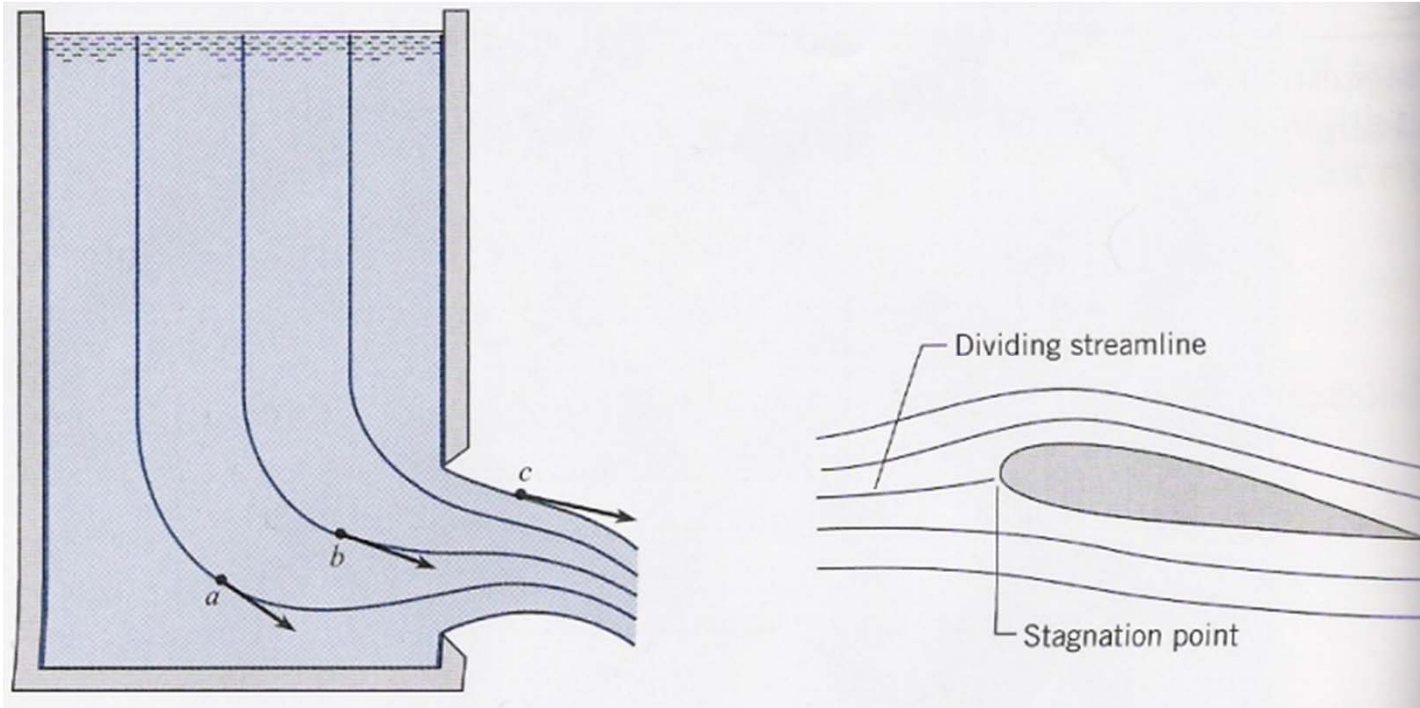


گاهی با تغییر دستگاه مختصات می توان جریات غیر دائمی را به دائمی تبدیل کرد\*\*:



جریانها را می توان با خطوط جریان (streamlines) که همواره بر بردارهای سرعت ذرات سیال مماس می باشند بطور ترسیمی نمایش داد:

در جریان دائمی خطوط جریان ثابت می ماند و مسیره‌های حرکت سیال (مسیر جریان pathlines) بر خطوط جریان منطبق هستند. اما در جریان غیر دائمی خطوط جریان تنها بطور لحظه‌ای معرف جریان بوده و در این حال تطابق ساده‌ای بین مسیر حرکت ذرات و خطوط جریان وجود ندارد.

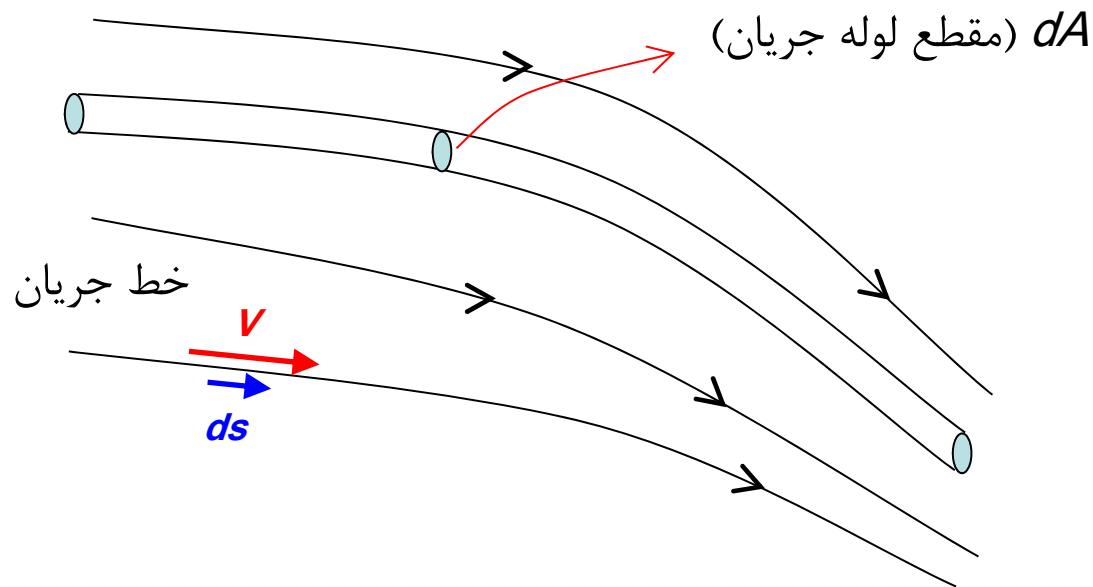


می توان معادله مسیر جریان را با استفاده از دینامیک ذرات تعیین کرد:

$$\begin{cases} v_{xp} = \frac{dx}{dt} \\ v_{yp} = \frac{dy}{dt} \\ v_{zp} = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

دسته خطوط جریانی که از پیرامون المان سطح کوچک  $dA$  در لحظه  $t$  رسم می شوند، لوله جریان (streamtube) را تشکیل می دهند.

مرز لوله جریان از خط جریان تشکیل می شود. لذا جریانی از سطوح جانبی لوله جریان نمی گذرد. به تعداد نامحدودی لوله جریان که با یکدیگر سطح مقطع محدودی را ایجاد می کنند، دسته لوله جریان گفته می شود.



$$\begin{cases} \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \\ d\vec{s} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \end{cases}$$

$\vec{v}$  و  $d\vec{s}$  موازی هستند:

$$\vec{v} \times d\vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

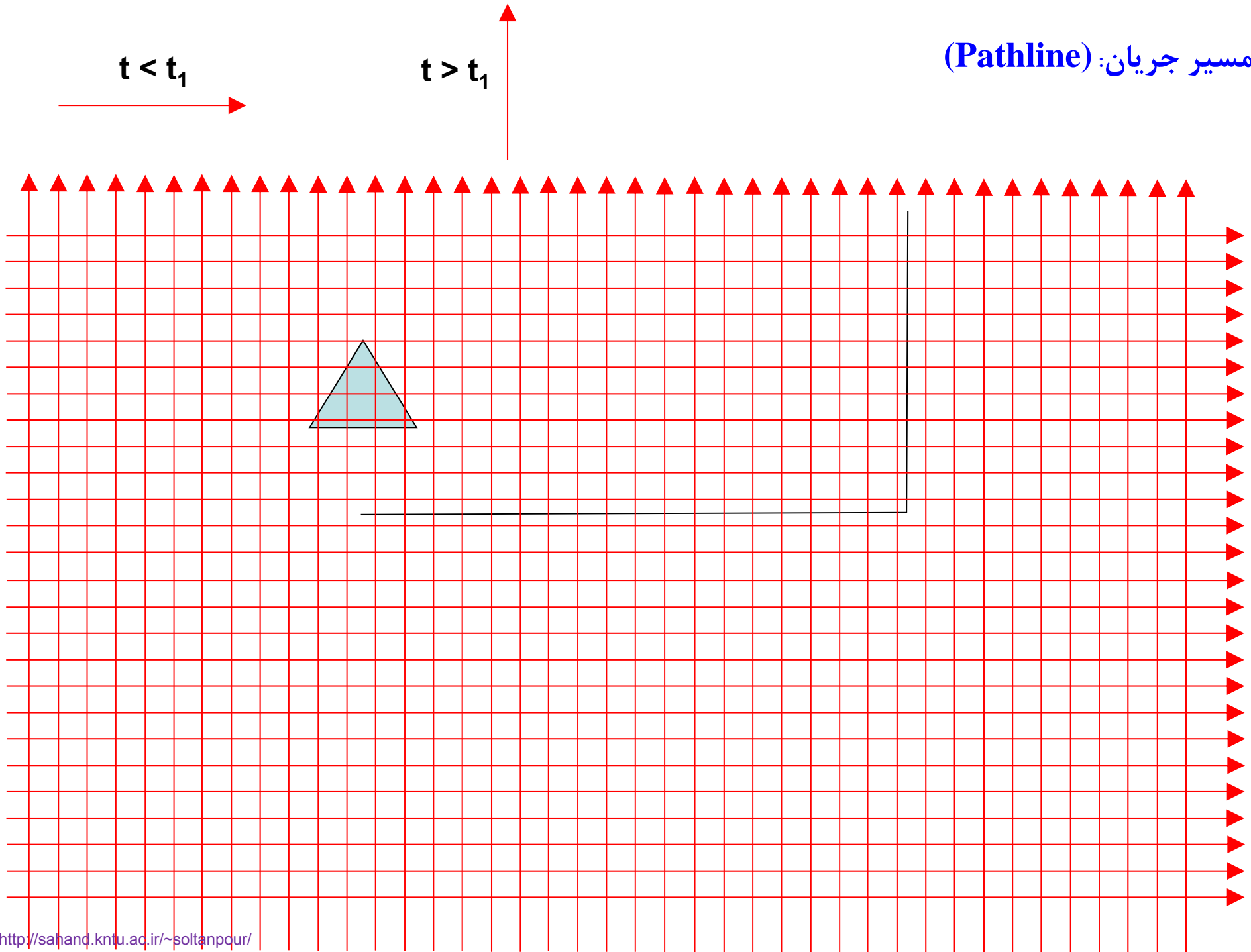
(در طول یک خط جریان)

روش دیگر برای به تصویر کشیدن الگوهای جریان تزریق رنگ یا دود (یا ذرات معلق) در نقطه ای از جریان و مشاهده مسیر حرکت آن در سیال می باشد. این خط اثر خط تمایل (streakline) نامیده می شود.

مسیر جریان: (Pathline)

$t < t_1$

$t > t_1$

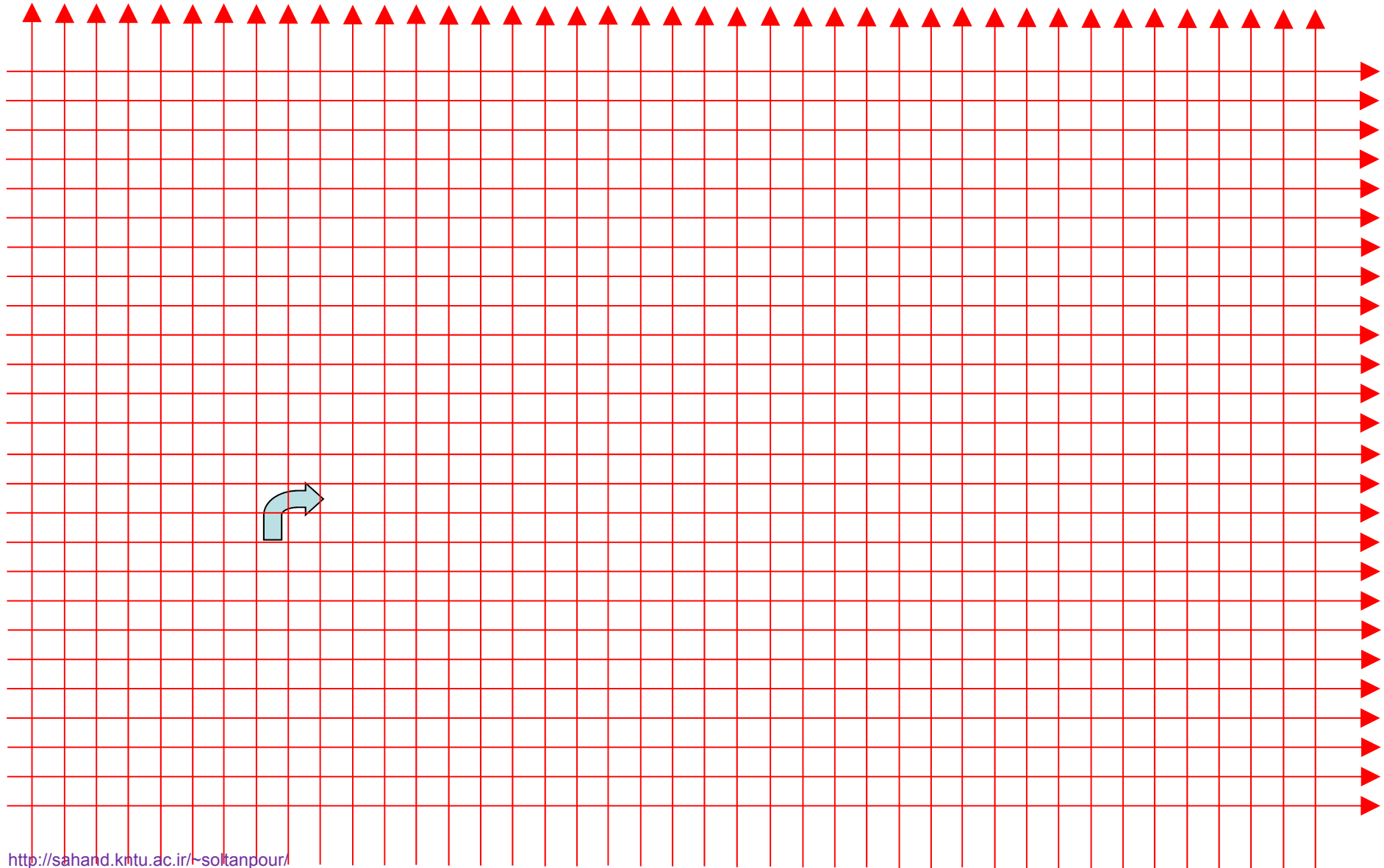


خط تمایل: (Streakline)

$t < t_1$

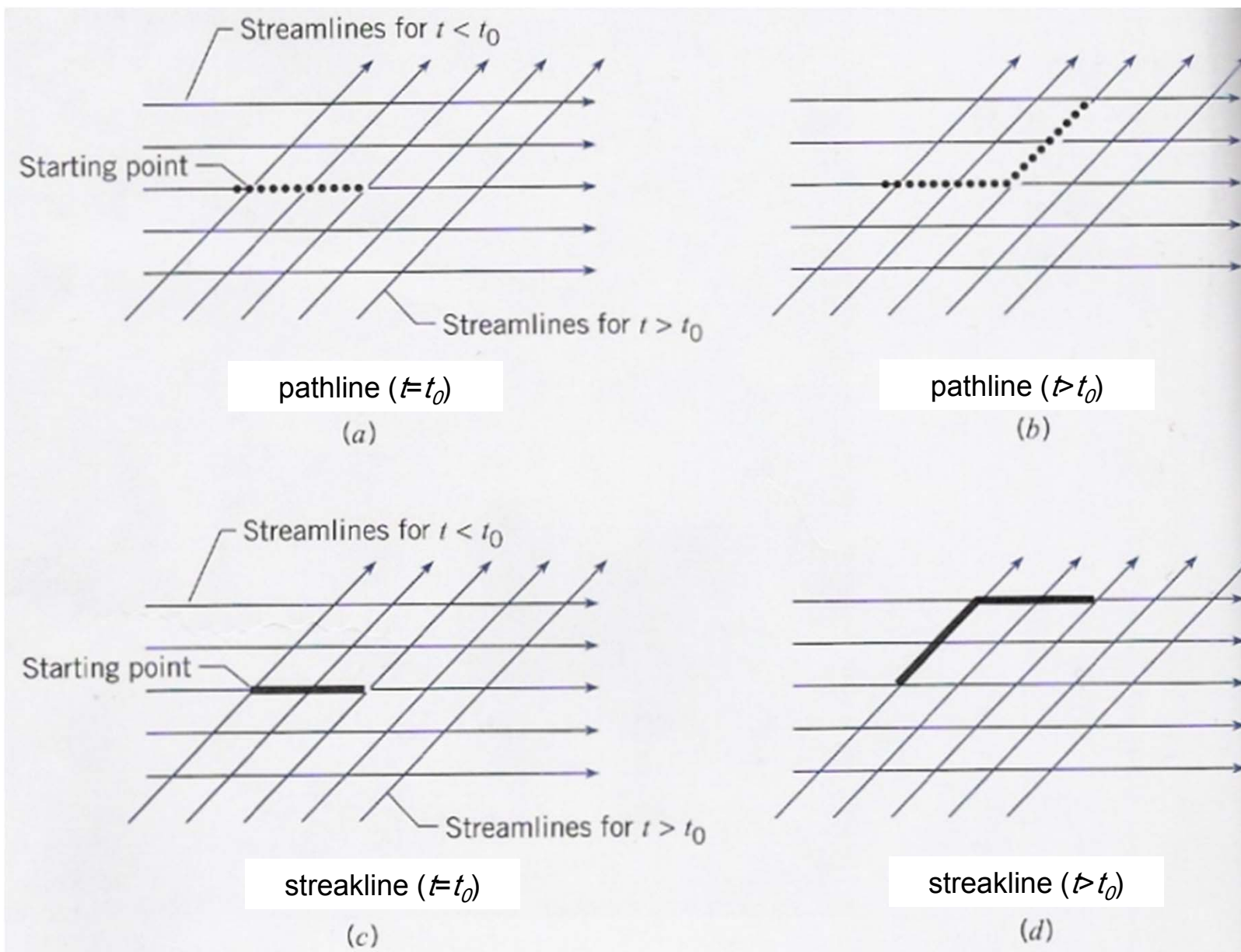


$t > t_1$





در جریان دائمی هر سه خط (خط جریان، مسیر جریان و خط تمایل) بر هم منطبق می شوند. در حالیکه خط جریان الگوی فعلی جریان را نشان می دهد، مسیر جریان و خط تمایل تاریخچه جریان را ارائه می دهند.



## دیدگاه‌های مطالعه حرکت سیال: (Viewpoints)

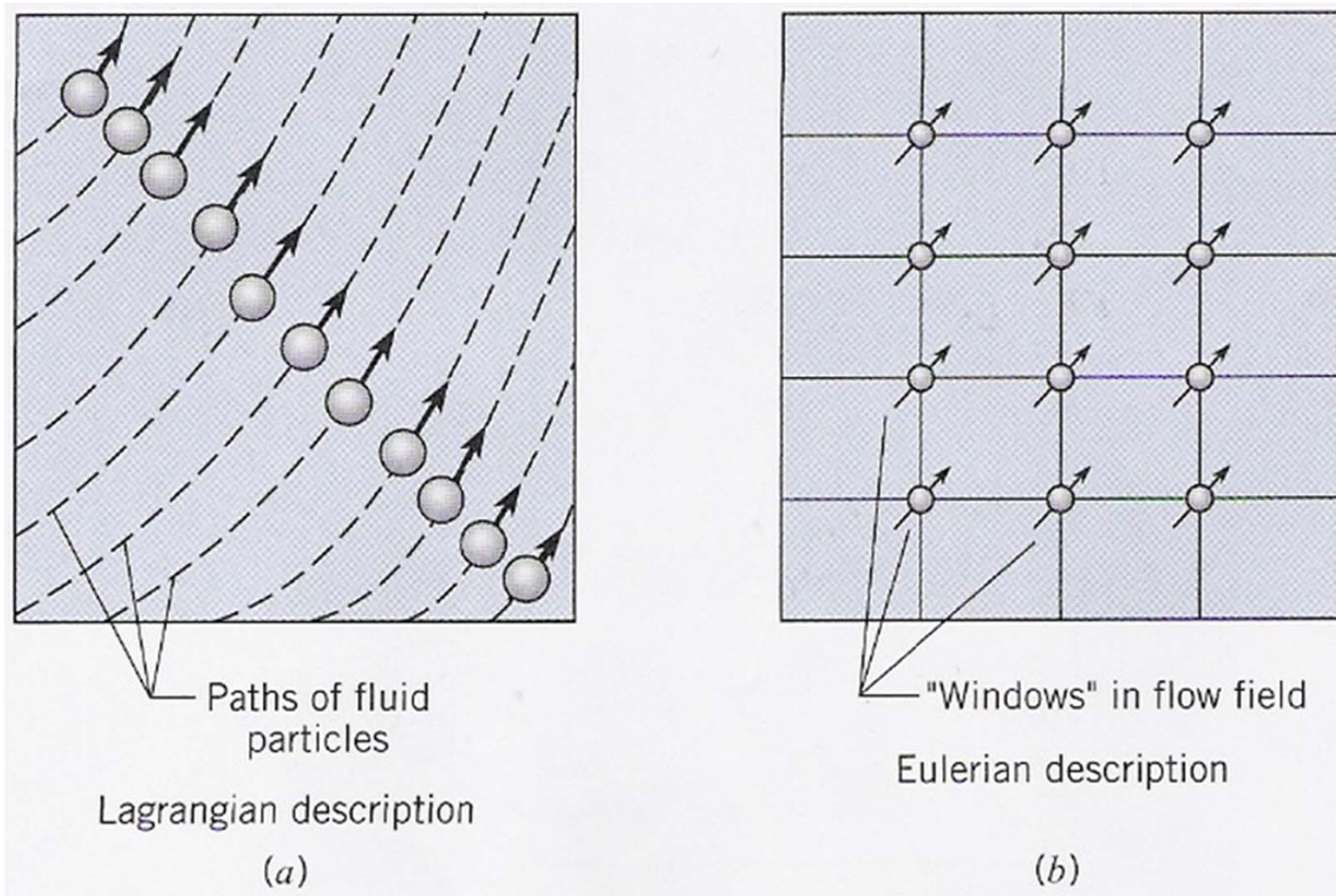
اگر نقطه ثابتی را در فضا به مختصات  $X_1, Y_1, Z_1$  در نظر بگیریم، سرعت ذرات گذرنده از این نقاط در هر لحظه را می‌توان با استفاده از میدان سرعت  $V(x, y, z, t)$  بدست آورد. به این روش که در یک نقطه ثابت از فضا سرعت‌های رشته پیوسته‌ای از ذرات سیال که از آن نقطه می‌گذرند اندازه گرفته می‌شود، دیدگاه اولری گفته می‌شود.

$$\begin{cases} v_x = f(x, y, z, t) \\ v_y = g(x, y, z, t) \\ v_z = h(x, y, z, t) \end{cases}$$

در دیدگاه لاگرانژی، حرکت هر یک از ذرات سیال را با دنبال کردن آن ذره تعقیب می‌کنیم. در این حالت برای هر یک از ذرات سیال سه تابع زمانی  $x(t)$ ،  $y(t)$  و  $z(t)$  را خواهیم داشت که در حالت کلی با توابع زمانی سایر ذرات متفاوت است.  $x(0)$ ،  $y(0)$  و  $z(0)$  موقعیت اولیه ذره را در لحظه  $t=0$  نشان می‌دهد. با تمرکز بر روی هر یک از ذرات:

$$\begin{cases} v_x = f(t) \\ v_y = g(t) \\ v_z = h(t) \end{cases}$$

که برای هر ذره تنها تابعی از  $t$  است.

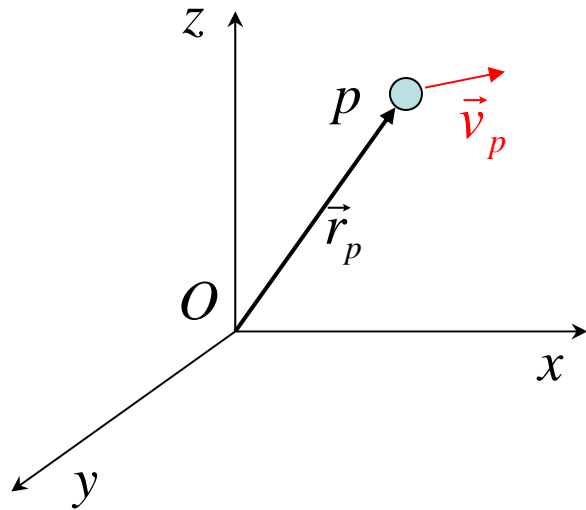


در توصیف لاگرانژی برای توصیف عمومی و کامل حرکت سیال مسیر تعداد بسیار زیاد از ذرات سیال باید مشخص گردد (شکل a). به همین دلیل اگر چه هر دو دیدگاه در دینامیک سیالات بکار میروند، در اکثر مسائل جریانهای سیال توصیف اولری استفاده می شود\*.

دو دیدگاه اولری و لاگرانژی به دائمی یا غیر دائمی بودن جریان بستگی ندارد.

## شتاب یک ذره جریان: (Acceleration of a flow particle)

شتاب یک ذره سیال برابر است با نرخ تغییر سرعت ذره. در صورت استفاده از دیدگاه لاگرانژی، مسیر حرکت ذره تعقیب می شود. شتاب ذره از دو بار مشتق گیری بردار تغییر مکان بدست می آید و تنها تابعی از زمان است:



$$\vec{r}_p = x_p(t)\vec{i} + y_p(t)\vec{j} + z_p(t)\vec{k}$$

$$\vec{v}_p = \frac{d\vec{r}_p}{dt} = u_p(t)\vec{i} + v_p(t)\vec{j} + w_p(t)\vec{k}$$

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_p}{dt^2} = a_{xp}(t)\vec{i} + a_{yp}(t)\vec{j} + a_{zp}(t)\vec{k}$$

بنابراین در دیدگاه لاگرانژی جهت تعیین سرعت در نقطه ای از میدان جریان باید مسیر حرکت ذره ای که از نقطه مورد نظر می گذرد مشخص شده (بردار  $r_p$ ) و سرعت از مشتق تغییر مکان بدست آید. واضح است که کاربرد این روش برای تعیین سرعت یک نقطه دلخواه میدان جریان بسیار پر زحمت است.\*

در دیدگاه اولری، شتاب تابعی از زمان و مکان است (یعنی شتاب رشته ذراتی که در لحظه  $t$  از موقعیت مکانی  $X, Y$  و  $Z$  عبور می کنند):

$$\vec{v}(x, y, z, t) \implies d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt$$

مشتق کلی (total derivative)  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left( \frac{D\vec{v}}{dt} \right)$  ← نرخ تغییرات سرعت در هر نقطه که با دنبال کردن یک ذره مشخص بدست می آید.

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

اما  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  مولفه های اسکالر سرعت هر ذره بوده و می توان آنها را با  $v_x, v_y, v_z$  نشان داد. بنابراین:

$$\vec{a} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$$= \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

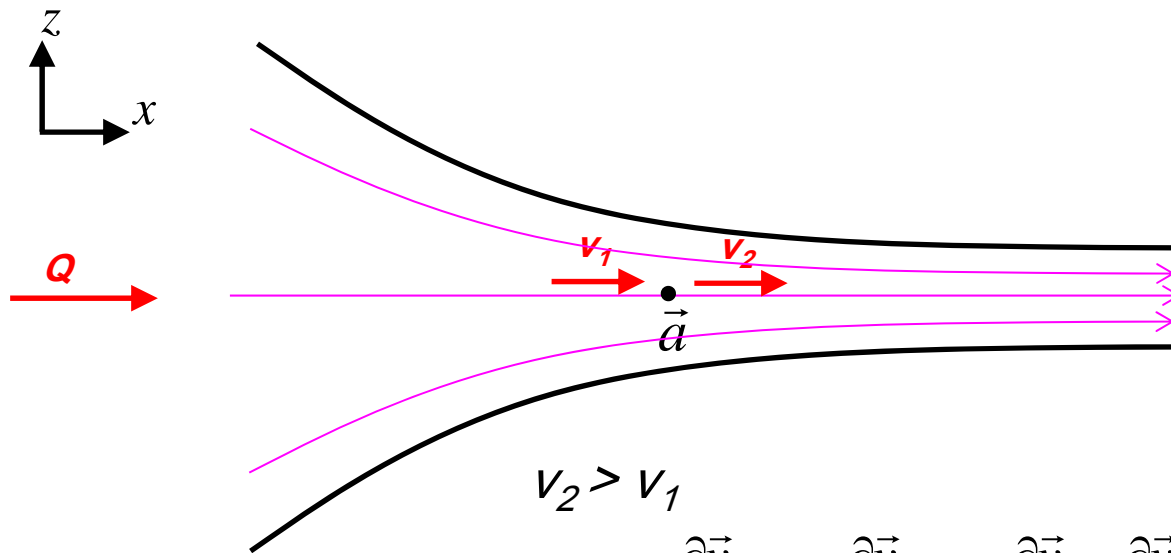
شتاب انتقالی (acceleration of transport)  
یا شتاب جابجایی (convective acceleration)

شتاب محلی (local acceleration)

در سه امتداد مختصات دکارتی:

$$\begin{cases} a_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ a_y = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ a_z = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{cases}$$

شتاب انتقالی ناشی از جابجایی ذره در میدان سرعت است در حالی که شتاب محلی در اثر تغییر میدان سرعت در محلی که در لحظه توسط ذره اشغال شده است بوجود می‌آید. در جریان دائمی شتاب محلی صفر بوده و کافیت تنها شتاب جابجایی در نظر گرفته شود.



مثلا در محور زانویی روبرو در صورت دائمی بودن جریان ( $Q=cte$ )، بدلیل افزایش سرعت ناشی از کوچک شدن مقطع صرفا شتاب انتقالی ناشی از جابجایی ذره در راستای  $x$  وجود دارد.

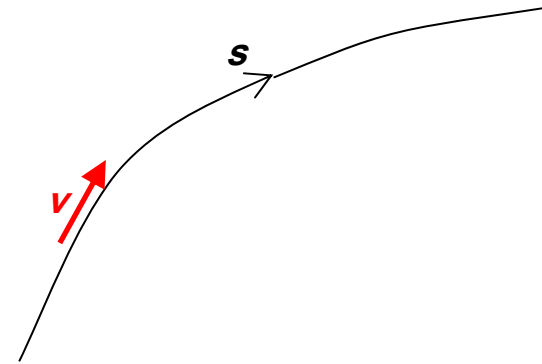
$$\vec{a} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} > 0$$

مختصات واقع بر خط جریان آسانترین سیستم مختصات قابل کاربرد می باشد (محل ذره بر روی خط جریان با  $S$  نشان داده می شود):

$$\vec{v} = \vec{v}(s, t) = v(s, t)\vec{e}_t$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\ &= v \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \end{aligned}$$

شتاب انتقالی
شتاب محلی



شتاب انتقالی را می توان با استفاده از مختصات مماسی و قائم (normal and tangential coordinates) به دو مولفه مماس بر مسیر و عمود بر آن تجزیه کرد:

$$\vec{v} = v\vec{e}_t$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

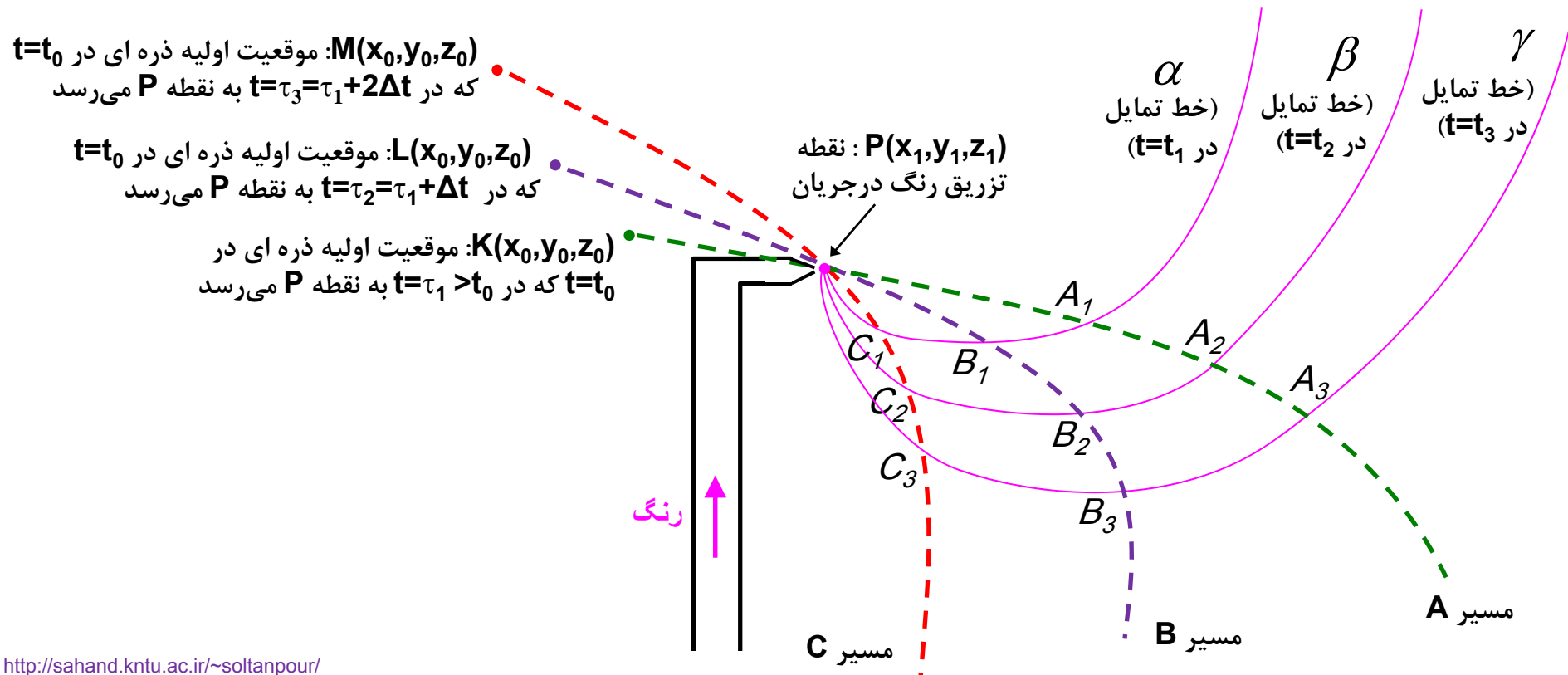
$$\begin{cases} a_t = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

مولفه عمود بر مسیر که در صفحه بوسان (osculari) قرار دارد.



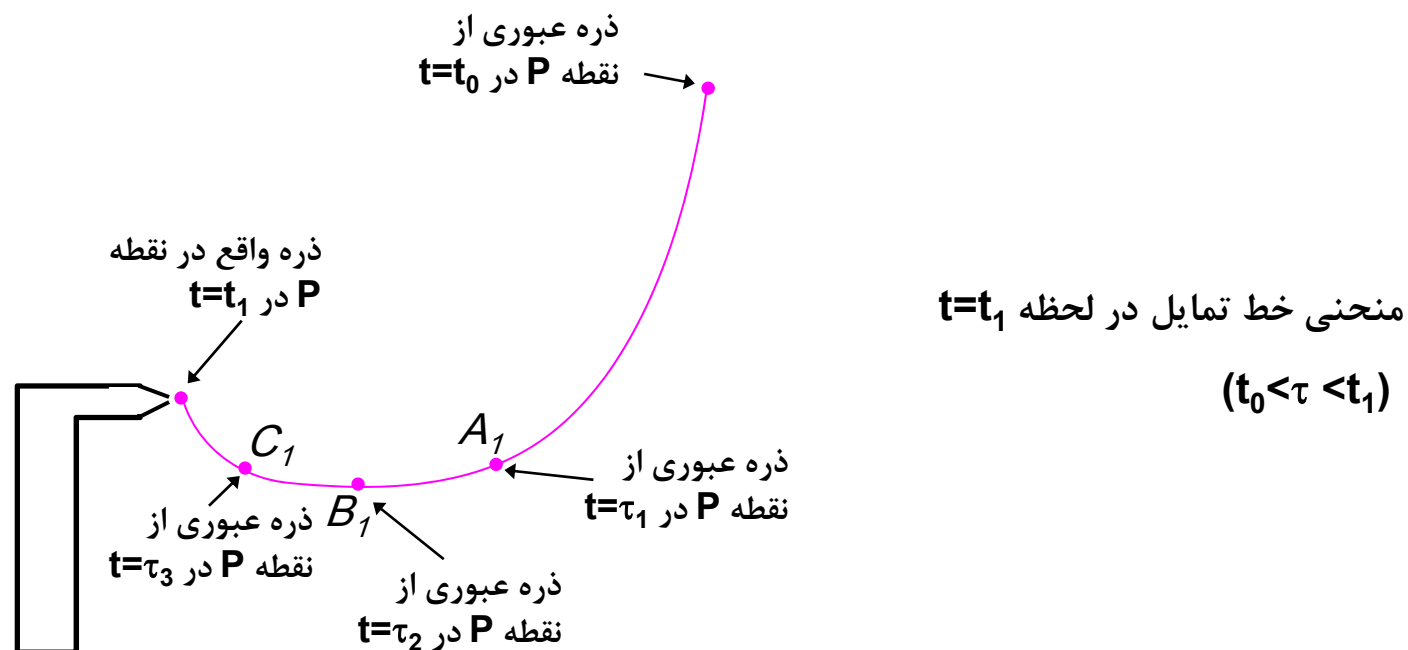
## تعیین معادله خط تمایل:

برای تعیین معادله خط تمایل فرض می‌کنیم در جریان غیر دائمی در نقطه  $P$  در لحظه  $t=t_0$  تزریق رنگ (یا دود) در نقطه  $P(x_1, y_1, z_1)$  آغاز شود. در این صورت ذره دود با جریان در طول زمان ( $t > t_0$ ) حرکت می‌کند. ذره  $A$  را در جریان در نظر می‌گیریم که در  $t=t_0$  در نقطه  $K(x_0, y_0, z_0)$  بوده و در  $t=\tau_1 > t_0$  به  $P(x_1, y_1, z_1)$  برسد. این ذره در زمانهای بعدی مسیر  $A$  را طی می‌کند. در لحظه  $t=\tau_2 = \tau_1 + \Delta t$  ذره دیگری ( $B$ ) که به نقطه  $P$  رسیده رنگی شده و مسیر  $B$  را طی می‌کند. به همین ترتیب ذره  $C$  که در زمان  $t=\tau_3 = \tau_1 + 2\Delta t$  از  $P$  عبور می‌کند در مسیر  $C$  حرکت می‌کند. بنابر این در زمانی مثل  $t_1$  ذره  $A_1$  در  $A$ ، ذره  $B_1$  در  $B$  و ذره  $C_1$  قرار دارد که این سه بر روی منحنی  $\alpha$  قرار دارند. پس اگر در این لحظه از جریان عکس گرفته شود منحنی  $\alpha$  نشان دهنده امتداد رنگ در جریان (موقعیت ذرات مختلف عبوری از  $P$ ) است (خط تمایل در لحظه  $t=t_1$ ).





بنابر این خط تمایل در لحظه  $t=t_1$  در واقع همان موقعیت مکانی ذرات مختلف عبوری از  $P$  در محدوده زمانی  $t_0 < \tau < t_1$  نشان می‌دهد:



به همین ترتیب عکس منحنی رنگ در لحظات  $t=t_2$  و  $t=t_3$  به ترتیب نشان دهنده خطوط تمایل  $\beta$  و  $\gamma$  در این لحظات در فاصله زمانی  $t_0 < \tau < t_2$  و  $t_0 < \tau < t_3$  می‌باشند. لازم به ذکر است که در جریان دائمی مسیرهای  $A$ ،  $B$  و  $C$  بر هم منطبق بوده و خط تمایل و مسیر جریان (و همچنین خط جریان) بر هم منطبق می‌شوند.

معادله خط تمایل را می توان به روش **لاگرانژ** بدست آورد. بدین منظور کافیهست ذراتی که در زمانهای مختلف از نقطه  $P(x_1, y_1, z_1)$  می گذرند تعقیب شده و موقعیت آنها در زمان یکسان تعیین گردد. معادله مسیر حرکت ذرات جریان که در  $t=t_0$  در نقطه  $(x_0, y_0, z_0)$  قرار دارند عبارت است از:

$$\begin{cases} x = f(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = g(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = h(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \quad (I)$$

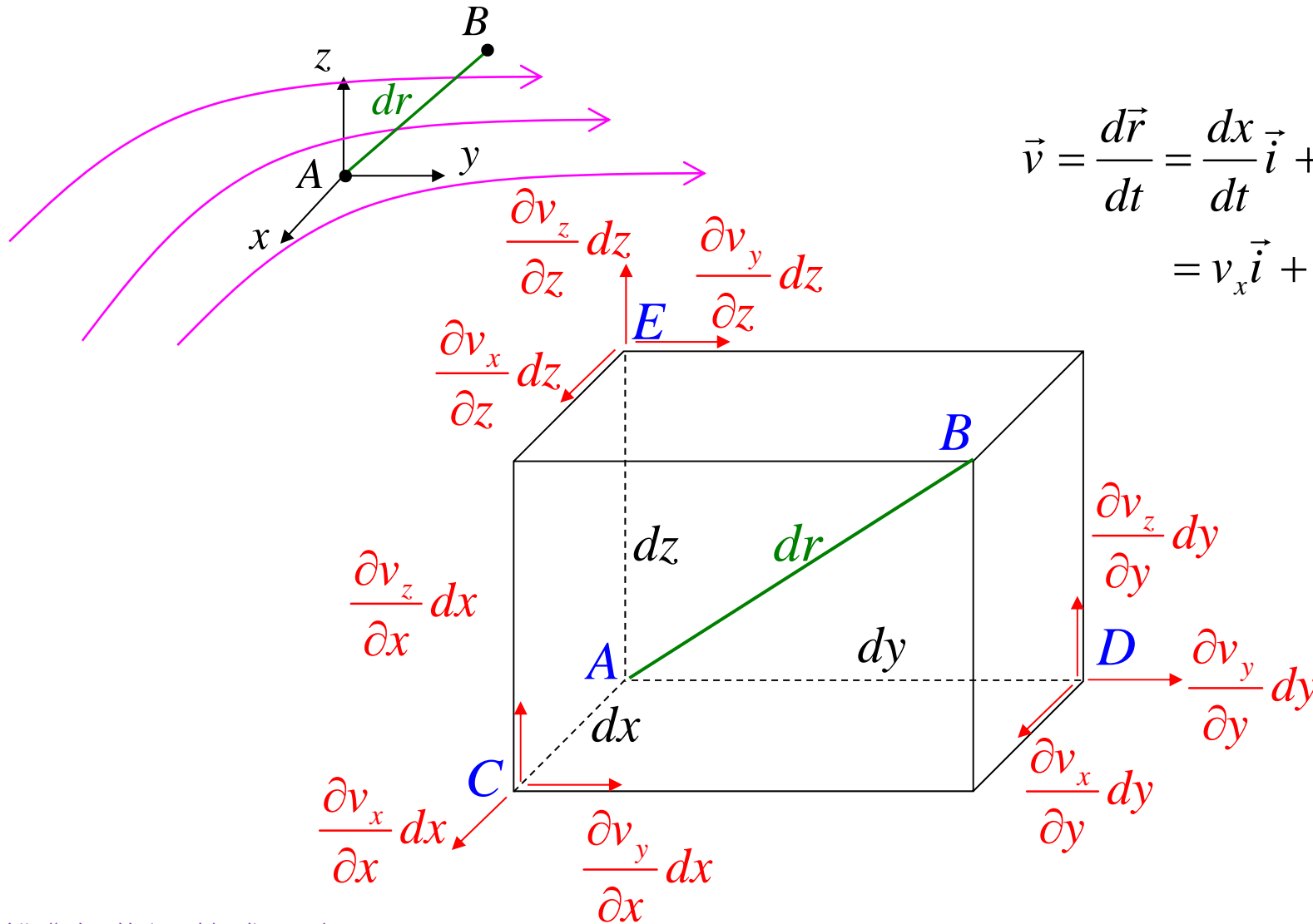
اگر از مجموعه ذرات جریان تنها ذراتی در نظر گرفته شوند که در لحظه  $t=\tau$  از  $P(x_1, y_1, z_1)$  می گذرند (مثلا ذراتی که در  $t=t_0$  از نقاط اولیه  $K$ ،  $L$  یا  $M$  شروع به حرکت کرده و به ترتیب در لحظات  $\tau_1$ ،  $\tau_1+\Delta t$  و  $\tau_1+2\Delta t$  از  $P$  عبور می کند- مسیره های  $A$ ،  $B$  و  $C$ ):

$$\begin{cases} x_1 = f(x_0, y_0, z_0, \tau) \\ y_1 = g(x_0, y_0, z_0, \tau) \\ z_1 = h(x_0, y_0, z_0, \tau) \end{cases} \quad (II)$$

این معادلات با تغییر  $\tau$  مسیر حرکت ذرات مختلفی را که در حین حرکت از  $P$  عبور می کنند نشان می دهد (مسیره های  $A$ ،  $B$  و  $C$ ). با حذف  $x_0, y_0, z_0$  از معادلات (I) و (II) **دسته منحنیهایی بر حسب  $t$  و  $\tau$**  بدست می آید که حرکات ذرات مختلف عبوری (  $\tau$  متغیر) از  $P$  را در لحظات مختلف ( $t$  متغیر) نشان می دهد. این معادلات با ثابت نگه داشتن  $\tau$  و تغییر  $t$  مسیر حرکت یک ذره عبوری از  $P$  را نشان می دهد (مثلا مسیره های  $A$ ،  $B$  یا  $C$ ). به همین ترتیب با ثابت نگه داشتن  $t$  و تغییر  $\tau$  ( $t_0 < \tau < t_1$ ) معادله موقعیت ذرات مختلفی بدست می آید که از  $P$  عبور کرده و در لحظه  $t$  در موقعیت جدید قرار گرفته اند (معادله خطوط تمایل  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  در لحظات معلوم  $t=t_1$ ،  $t=t_2$  و  $t=t_3$ ).

## جریان غیر چرخشی: (Irrotational flow)

برای بررسی حرکت نسبی ذرات مجاور (adjacent flow particle) که به فاصله بسیار کمی از هم قرار دارند، دو ذره  $A$  و  $B$  را که در لحظه  $t$  به فاصله  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  از یکدیگر قرار در نظر می‌گیریم. نرخ تغییر شکل (deformation rate) و نرخ دوران (rotation rate) این مکعب مستطیل را می‌توان به کمک حرکات نسبی  $A$  و  $B$  نشان داد:



$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \\ &= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx$$

$$\vec{v}_C - \vec{v}_A = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx \vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x} dx \vec{k}$$

حرکت نسبی بین  $A$  و  $C$

می توان حرکت بین ذرات  $D$  و  $E$  را نیز نسبت به  $A$  بیان کرد (شکل اسلاید قبل). اگر کرنش عمودی (normal strain) را به  $\epsilon_{xx}$  نمایش دهیم:

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

→ نرخ تغییر طول رشته  $AC$   
← طول اولیه

که در آن “.” (dot) نشان دهنده نرخ تغییرات (تغییر در واحد زمان) است. به شکل مشابه:

$$\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \text{و} \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$\dot{\epsilon}_{ii}$  نرخ کرنش عمودی (normal strain rate) در سیال با بعد  $1/s$  است. می توان نرخ کرنش برشی را نیز به شکل نرخ تغییر زاویه قائم رئوس مکعب نشان داد. سرعت زاویه ای دوران ضلع  $AC$  حول محور  $z$  ها در نقطه  $C$  برابر است با:

$$\frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

به همین ترتیب سرعت زاویه ای ضلع  $AD$  برابر است با:

$$\frac{\frac{\partial v_x}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

بنابراین نرخ تغییر زاویه برشی در واحد زمان  $\dot{\gamma}_{xy}$  (time rate of change of the shear angle) که همان نرخ تغییر زاویه  $CAD$  (که در لحظه  $t$  قائمه است) حول محور  $Z$  ها را نشان می دهد برابر است با:

$$\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

به همین ترتیب نرخ تغییر زاویه  $CAE$  و  $DAE$  برابر است با:

$$\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{zx} = \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad \text{و} \quad \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zy} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)$$

می توان نرخ تغییر شکل را با تانسور نرخ کرنش (strain rate tensor) نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{xz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{yx}}{2} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{zy}}{2} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

برای تعیین نرخ تغییر زاویه اضلاع مکعب مستطیل (rate of angular change of the sides)، سرعت زاویه ای اضلاع مکعب مستطیل حول محورهای دوران را در نظر می‌گیریم. سرعت زاویه ای  $AC$  حول محور  $Z$  ها در نقطه  $C$  برابر است با:

$$\frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

به همین ترتیب سرعت زاویه ای  $AD$  حول محور  $Z$  ها (با توجه به جهت مثبت محور  $Z$  ها) در نقطه  $D$  برابر است با:

$$\frac{-\frac{\partial v_x}{\partial y} dy}{dy} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

بنابراین نرخ تغییر زاویه  $CAD$  حول محور  $Z$  ها (در واقع نرخ دوران نیمساز زاویه قائمه بین اضلاع  $AC$  و  $AD$ ) که در لحظه  $t$  قائمه است، برابر است با:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \left( -\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right]$$

نرخ متوسط دوران اضلاع متعامد  $AC$  و  $AD$  همان سرعت زاویه ای مکعب مستطیل حول محور  $Z$  ها ( $\omega_z$ ) است:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

به همین ترتیب، سرعت زاویه ای دوران مکعب مستطیل حول محور محور X ها و حول محور Y ها برابر است با:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad \text{و} \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

و یا:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

اگر بردار چرخش (vorticity vector) را با  $\vec{\omega} = \text{curl} \vec{v} = \text{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$  نمایش دهیم\*:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{curl} \vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

مفهوم فیزیکی دوران یک المان را می توان با curl میدان سرعت نمایش داد. اگر در هر نقطه از جریان  $\vec{\omega} = 0$  باشد، جریان را غیر چرخشی (irrotational flow) می نامند. اگر در تعدادی از نقاط  $\vec{\omega} \neq 0$  باشد، جریان چرخشی (rotational flow) است.\*\*

در جریان غیر چرخشی:

$$\vec{\omega} = \text{curl} \vec{v} = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

برای دوران ذره ای از سیال در جریانی که از ابتدا غیر چرخشی بوده است باید بر سطح المان تنش برشی ایجاد شود. از آنجایی که تنش برشی به لزجت سیال و نرخ تغییرات سرعت بستگی دارد، در اغلب سیالات در بخش بزرگی از جریان که گرادیان سرعت کوچک است، جریان غیر چرخشی باقی می ماند.

در ناحیه باریکی در مجاورت مرزهای جریان گرادیان سرعت بزرگ بوده و لذا علی رغم کوچک بودن لزجت جریان چرخشی خواهد بود. این ناحیه مجاور مرز **لایه مرزی (boundary layer)** نامیده می شود.

